Une borne inférieure du temps d'inspection au vu de la maintenance

Franck Corset* **& Stéphane Chrétien****

*LabSAD UPMF Grenoble
Franck.Corset@upmf-grenoble.fr

**Département de Mathématiques Université de Franche-Comté
chretien@descartes.univ-fcomte.fr

XXXVIIèmes JOURNÉES DE STATISTIQUE
06-10 juin 2005
Pau

Plan

1. Introduction

2. Théorie des graphes et modélisation du problème

3. Inégalité de Dyer-Frieze-McDiarmid

4. Plus court chemin comme un programme linéaire

5. Une borne inférieure sur le temps d’inspection

6. Simulations

7. Conclusion

Introduction

– Etude d’un système mécanique

– Origine : Réseau Bayésien où les sommets sont des états de dégradation

– Arcs représentent la possible causalité entre deux dégradations

– Politique de maintenance : inspecter avant une dégradation majeur

– Une borne inférieure sur le temps d’inspection (le pire cas)

Représentation du modèle de dégradation

– Sommet 1 représente l'état neuf du système

– Sommet n représente un état de dégradation inacceptable

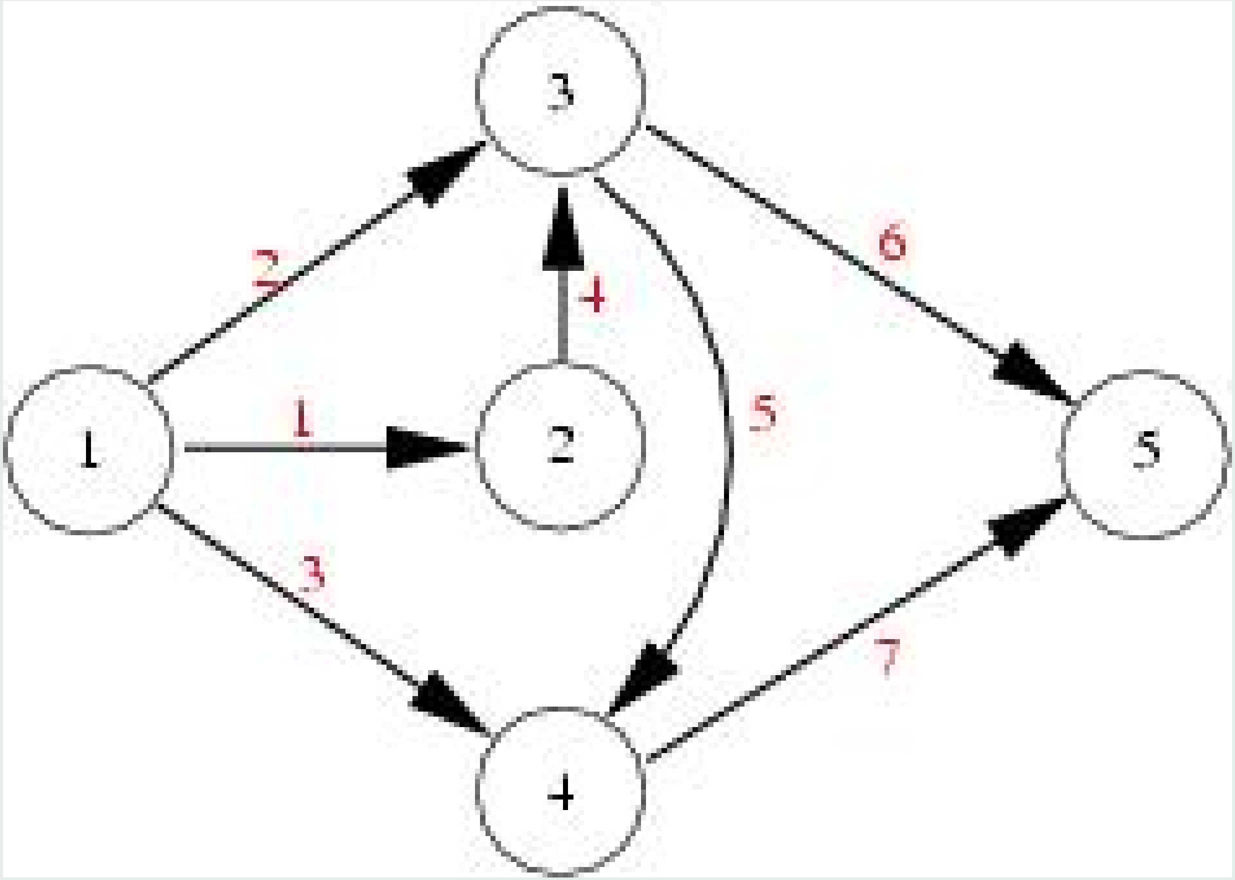
– Le système se dégrade d'un état vers un autre, i.e. d'un sommet vers un sommet voisin

– Le temps de transition entre deux états (pondération de l'arc i) est une variable aléatoire $\sim \mathcal{W}(\eta_i, \beta_i)$

– Les v.a. sont indépendantes

– Politique de maintenance : le système doit être inspecté avant d'atteindre le sommet n

Un exemple simple



Inégalité de Dyer-Frieze-McDiarmid

Soit le programme linéaire suivant

$$\begin{aligned} z^\star = \ \min \ & c^T x \\ \text{s.t.} \ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

où c_i sont des v.a. indépendantes, et $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est une matrice de rang plein.

Inégalité de Dyer-Frieze-McDiarmid

Theorem 1 *Supposons que les variables de coûts c_i soient indépendantes et satisfassent*

$$\mathbb{E}[c_i \mid c_i \geq h] \geq \mathbb{E}[c_i] + \alpha h$$

pour $\alpha \in (0,1]$. Alors pour chaque matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et chaque vecteur $b \in \mathbb{R}^n$, la valeur optimale z^* du problème (1) satisfait

$$\mathbb{E}[z^*] \leq \frac{1}{\alpha} \max_{S\,:\,\#S=n} \sum_{i \in S} \mathbb{E}[c_i] x_i \tag{2}$$

pour chaque solution faisable x, i.e. pour x vérifiant $Ax = b$.

$\Rightarrow$ donne une borne supérieure pour la moyenne du temps d'inspection.
Pour une loi exponentielle $\alpha = 1$, pour la loi uniforme sur $[0,1]$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

Programme linéaire déterministe

Corollary 1 *Si on remplace c_i par $\mathbb{E}[c_i]$ et considérons le problème déterministe suivant :*

$$\begin{aligned} \zeta^\star = \quad & \min \quad \mathbb{E}[c]^T x \\ & \textit{s.t.} \quad Ax = b \\ & \qquad\quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Alors la valeur optimale du problème du plus court chemin, notée z^*, satisfait

$$\mathbb{E}[z^*] \leq \zeta^*.$$

$\Rightarrow$ ne donne pas une borne inférieure.

Problème du plus court chemin

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté sans cycle avec n sommets et m arcs, et A sa matrice d'incidence,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t$ et $(c_i)_{i=1,\ldots,m}$ les coûts (positifs) sur les arcs. Alors le problème de plus court chemin peut s'écrire

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Proposition 1 *Soit k le nombre de composantes connexes. Alors $rg(A) = n - k$.*

Dans notre cas, $k = 1$ et A n'est pas une matrice de rang plein !

Matrice d'incidence modifiée

Soit $\tilde{A}$ la matrice d'incidence modifiée :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, le problème du plus court chemin est équivalent au programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} z^\star = \ \min \ & \tilde{c}^T x \\ \text{s.t.} \ & \tilde{A}x = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

où $\tilde{c}$ est le vecteur des coûts auquel on a ajouté un élément nul 0.

La loi de Weibull

Soit X une variable aléatoire distribuée selon une loi de Weibull

$$f_X(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} e^{-(\frac{t}{\eta})^{\beta}}.$$

Alors, le temps moyen résiduel avant une défaillance (MRTF) est donné par

$$G_X(h) \triangleq E[X \mid X \geq h] = \eta e^{(\frac{h}{\eta})^{\beta}} \Gamma(1 + \frac{1}{\beta}, (\frac{h}{\eta})^{\beta}),$$

où $\Gamma(a, h)$ est la fonction gamma incomplète définie par

$$\Gamma(a, h) = \int_{h}^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt.$$

La loi de Weibull

Lemma 1 *Si* $\beta \geq 1$ *alors*

$$\lim_{h \to 0} G'_X(h) = 0 \textit{ and } \lim_{h \to +\infty} G'_X(h) = 1$$

et de plus si $\beta < 2$ *nous avons*

$$G''_X(h) > 0, \quad \lim_{h \to 0} G''_X(h) = +\infty \textit{ and } \lim_{h \to +\infty} G'_X(h) = 0.$$

Proposition 2 *Supposons que* X *soit distribué selon une Weibull avec* $\beta \in (1, 2)$. *Alors pour tout* $h \geq 0$, *on a*

$$E[X \mid X \geq h] \leq E[X] + h.$$

Théorie de la programmation linéaire

Soit x une solution faisable (satisfaisant $Ax = b$ et $x \geq 0$) :

$$\begin{cases} x_i = 0 \text{ forall } i \notin B \text{ and} \\ x_B = A_B^{-1} b \end{cases} \tag{5}$$

où x_B est le vecteur composé des coordonnées indicées par B et A_B la sous matrice de A indicée par B.

Lemma 2 *Soit B une partie de $\{1, \ldots, n\}$ tel que $A_B^{-1} b \geq 0$ et $N = \{1, \ldots, n\} \setminus B$. Un vecteur x défini par (5) sera solution de (1) ssi $c_i \geq c_B^t A_B^{-1} a_i$ pour tout $i \notin B$ où a_i est la i^{me} colonne de A.*

La borne inférieure

Theorem 2 *Soit le problème du plus court chemin donné (1) où les composantes c_i du vecteur coût c sont indépendantes et suivent une loi de Weibull avec comme paramètres η_i et β_i, $i = 1, \ldots, n$. Soit x une solution faisable de (1), i.e. satisfaisant $Ax = b$ et $x \geq 0$. Alors, l'espérance de la valeur optimale z^* admet la borne inférieure suivante*

$$\sum_r p_r \sum_{i \in B_r} E[c_i] x_i \leq E[z^*],$$

où (B_r) est la famille de toutes les bases du program (1) et pour tout r, p_r est la probabilité que B_r soit optimale.

Difficulté d'appliquer cette borne car il est nécessaire d'estimer tous les p_r ! $\Rightarrow$ Nous utiliserons uniquement les bases optimales qui apparaissent le plus fréquemment.

La borne inf en pratique

Corollary 2 *Soit x la solution du programme linéaire (3) où les coûts sont remplacés par leurs espérances, soit B la base optimale associée à x et soit $\hat{p}_B$ la borne inf de la probabilité que B soit une base optimale dans (1) avec un niveau de confiance de $1-\alpha$. Alors avec la probabilité $1-\alpha$ nous avons*

$$\hat{p}_B E[c]^t x \leq E[z^*].$$

– Pour η et β fixés, on résoud N problèmes de plus court chemin,
– N bases optimales avec une proportion p_B,
– Etant donné un risque α, nous sous-estimons p_B

$$\hat{p}_B = p_B - q_{1-\alpha} * \sqrt{p_B(1-p_B)/N},$$

avec $q_{1-\alpha}$ le quantile de la loi normale.

– Calcul de la borne inférieure correspondante.

Simulations

– Pour un même graphe,

– pour le problème $i = 1, \ldots, 100$, simulation de $\eta(i)$ suivant une loi normale $\mathcal{N}(50, 100)$ et $\beta(i)$ suivant une loi uniforme sur $[1, 2]$.

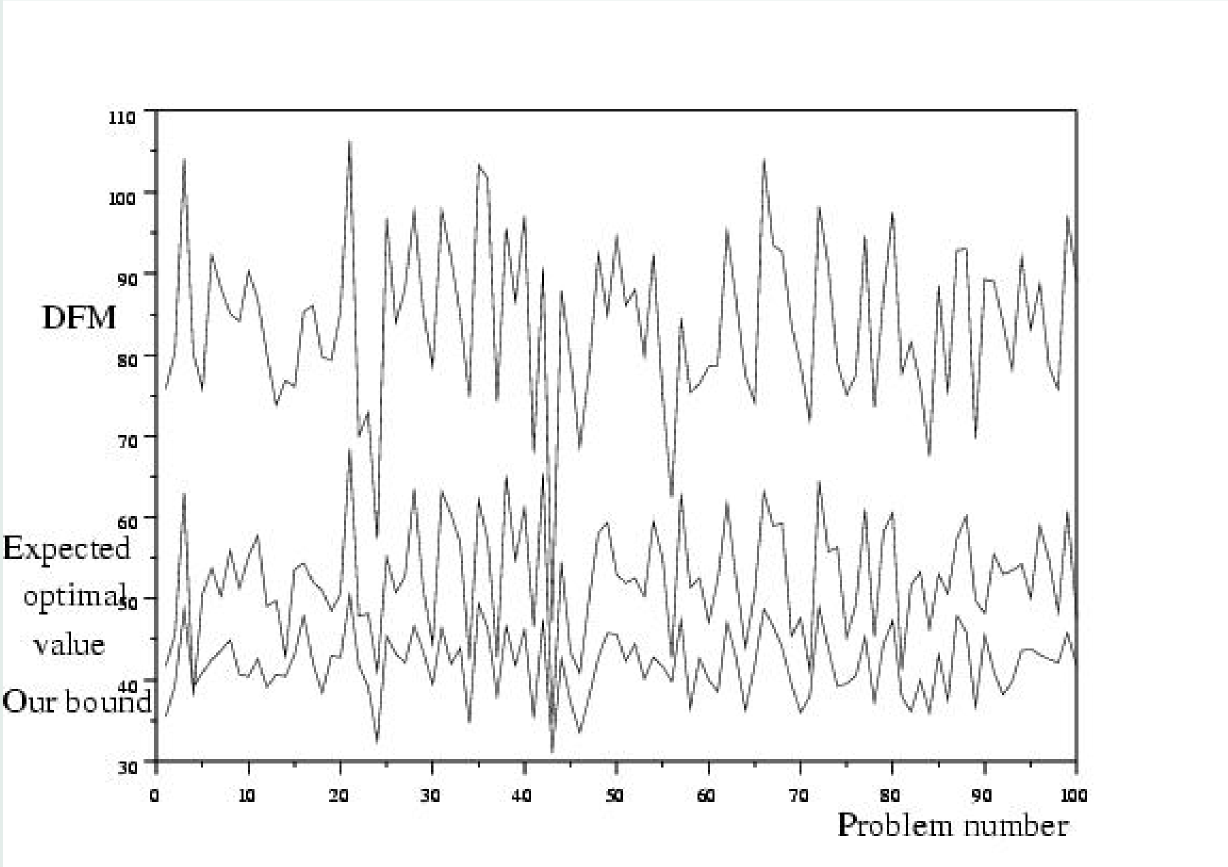
– Le coût c_j de l'arc j suit une loi de Weibull $W(\eta(i), \beta(i))$.

– Espérance du coût optimal par des simulations de Monte Carlo sur 1000 échantillons.

– Calcul de $\hat{p}_r$ avec un risque $\alpha = 5\%$.

– Calcul de la borne inférieure $\hat{p}_B E[c]^t x$.

Simulations



Conclusions et perspectives

* Notre borne inférieure est "meilleure" que la borne supérieure DFM (en valeur absolue).

* Erreur moyenne relative inférieure à 20%.

* De bons résultats expérimentaux.

* Application sur des systèmes réels.

* Utilisation des inégalités de type Talagrand.